SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS DE LA OME 49ª

1. Sean a,b y n enteros positivos tales que $a > b$ y $ab - 1 = n^2$. Prueba que

$$a - b \geq \sqrt{4n-3}.$$

Indica justificadamente cuándo se alcanza la igualdad.

SOLUCIÓN:

Supongamos que el resultado a demostrar fuera falso.
Entonces $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab < 4n - 3 + 4(n^2+1) = (2n+1)^2$. Pero como $a+b$ es entero y $a+b < 2n+1$, entonces $a+b \leq 2n$ y por la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica $n^2 + 1 = ab < \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = n^2$, que es una contradicción. Luego el resultado a demostrar es cierto.

El caso de la igualdad requiere que $(a+b)^2 = 4n - 3 + 4(n^2+1) = (2n+1)^2$, debido a la identidad $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$. Por tanto $a+b = 2n+1$. La igualdad $a - b = \sqrt{4n-3}$ se alcanza cuando el radicando sea necesariamente un cuadrado perfecto impar; es decir $4n - 3 = (2u+1)^2$ para algún entero no negativo u, con lo que

$$n = u^2 + u + 1 \quad \text{y} \quad a - b = 2u + 1.$$

Además, $b = n - u = u^2 + 1$, luego $a = b + 2u + 1 = u^2 + 2u + 2$. Se comprueba fácilmente que en efecto $ab = u^4 + 2u^3 + 3u^2 + 2u + 2 = (u^2+u+1)^2 + 1 = n^2 + 1$.
Luego hay igualdad si y sólo si

$$a = u^2 + 2u + 2, \quad b = u^2 + 1 \quad \text{y} \quad n = u^2 + u + 1, \quad \text{con} \quad a - b = 2u + 1,$$

para todo entero no negativo u.

2. Determina todos los números enteros positivos n, para los cuales

$$S_n = x^n + y^n + z^n$$

es constante, cualesquiera que sean x, y, z reales tales que, $xyz = 1$ y $x + y + z = 0$.

SOLUCIÓN:

Supongamos z conocido. Entonces x, y son dos números reales con suma $-z$ y producto $\frac{1}{z}$; es decir son las raíces de la ecuación $\rho^2 - \rho z + \frac{1}{z} = 0$, o bien:

$$x, y = \frac{-z \pm \sqrt{z^2 - \frac{4}{z}}}{2}.$$

Así una posible solución es por ejemplo $z = \sqrt[3]{4}$ y $x = y = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Sin embargo, podemos hacer z arbitrariamente grande en valor absoluto, siendo entonces uno de los dos números x ó y también arbitrariamente grande en valor absoluto y de signo contrario a z. Y el otro arbitrariamente pequeño en valor absoluto y de signo negativo. Se deduce inmediatamente que n no puede ser par cuando S_n es constante, ya que por una parte toma un valor finito y bien determinado cuando $z = \sqrt[3]{4}$ y por otra puede

tomar valores arbitrariamente grandes y siempre positivos cuando z crece arbitrariamente.
Para finalizar el problema utilizaremos el siguiente resultado.
Lema: Para todo $n \geq 3$ impar, fijado z, se puede escribir $x^n + y^n$ como un polinomio en z de grado n (más algún término posiblemente de exponente negativo) y con coeficientes iguales a -1, para los términos de grado n, iguales a 0, para los términos de grado $n-1, n-2$ y n para los términos de grado $n-3$.
Demostración:
Para $n = 3$ tenemos que $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = -z^3 + 3$.
Para $n = 5$ tenemos $x^5 + y^5 = (x+y)^5 - 5xy(x^3 + y^3) - 10x^2y^2(x+y) = -z^5 + 5z^2 - \frac{5}{z}$.
Si el resultado es cierto para un entero impar n, entonces para $n+2$ tenemos

$$x^{n+2} + y^{n+2} = (x+y)^{n+2} - \sum_{u=1}^{\frac{n+1}{2}} \binom{n+2}{u} x^u y^u \left(x^{n+2-2u} + y^{n+2-2u}\right) =$$

$$-z^{n+2} - \frac{n+2}{z}(x^n + y^n) + \sum_{u=2}^{\frac{n+1}{2}} \binom{n+2}{u} \frac{x^{n+2-2u} + y^{n+2-2u}}{z^u}.$$

Por hipótesis de inducción la suma para $u \geq 2$ no contiene ningún término de grado superior a $n-4$, y también por hipótesis de inducción, el término de mayor grado del segundo sumando del miembro de la derecha es $-\frac{n+2}{z}(-z^n) = (n+2)z^{n-1.}$
De este modo queda probado el lema por inducción completa.

Del razonamiento inicial se deduce que si S_n es constante, no puede ser n par y por el lema cuando $z \to \infty$ para algún $n \geq 5$ impar dado, se tiene que

$$x^n + y^n + z^n \to nz^{n-3} \to \infty,$$

con signo positivo además por ser $n-3$ par en este caso. Luego sólo podrían ser constantes S_1 y S_3: $S_1 = 0$ es constante por hipótesis y $S_3 = 3$ como consecuencia de un resultado hallado durante la demostración del lema.
Por tanto, se concluye que S_n es constante con las condiciones del enunciado, si y sólo si $n = 1$ ó $n = 3$.

3. Sean k y n enteros, con $n \geq k \geq 3$. Se consideran $n+1$ puntos en el plano, no alineados entre sí tres a tres. A cada segmento que une entre sí dos de esos puntos se le asigna un color de entre k colores dados.
Se dice que un ángulo es *bicolor* si tiene por vértice uno de los *n+1* puntos, y por lados, dos de los segmentos anteriores que sean de distinto color.
Demuestra que existe una coloración tal que el número de *ángulos bicolores* es estrictamente mayor que

$$n\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor^2 \binom{k}{2}.$$

OBSERVACIÓN: Se denota por $\lfloor t \rfloor$ la parte entera del número real t; es decir el mayor entero $n \leq t$.

SOLUCIÓN:

Utilizaremos en la solución el siguiente resultado o lema:

Para todo entero k≥3, se pueden colorear, usando k colores, todos los lados y diagonales de un polígono regular de k lados, de forma que los k–1 lados y diagonales *que confluyen en cada vértice estén coloreados de distinto color. Se puede además elegir la coloración de forma que, para cada dos vértices consecutivos del polígono, el color ausente para cada uno de ambos (es decir, aquel color del que no está pintado ningún lado o diagonal que concurre en cada uno de dichos vértices) sea distinto.*

Prueba: Cada lado o diagonal del polígono regular de k lados es una cuerda de su circunferencia circunscrita, y su mediatriz es eje de simetría del polígono. Como es conocido que el polígono tiene k ejes de simetría, podemos, a cada eje de simetría, asociarle un color, y pintar de dicho color todos los lados y diagonales que son perpendiculares al mismo (aquellos para los que el eje de simetría del polígono es la mediatriz).Luego dos lados o diagonales tienen el mismo color si y sólo si son paralelos, y como los k–1 lados o diagonales que confluyen en un vértice uniéndolo a los k–1 restantes no pueden ser paralelos dos a dos, estos k–1 lados o diagonales tienen distinto color, como queríamos demostrar. Además, dados cuatro vértices consecutivos que numeramos ordenadamente P_1, P_2, P_3, P_4, el color del que está pintada la diagonal P_1P_3 corresponde a todos los lados y diagonales perpendiculares al eje de simetría que pasa por P_2, luego está ausente del vértice P_2, y de forma análoga el color del que está pintada la diagonal P_2P_4 está ausente del vértice P_3, y estos dos vértices consecutivos tienen colores ausentes distintos.
Para $k = 3$ se cumple trivialmente, siendo suficiente pintar cada lado del triángulo equilátero, de uno de los 3 colores disponibles.

Dados n y k cumpliendo las restricciones del enunciado, construimos una coloración en la que el número de ángulos bicolores sea mayor que la cota propuesta. Para ello, elegimos primero un punto O, al que llamamos “pivote”, y distribuimos los n puntos restantes en k subconjuntos A_1, A_2,..., A_k, colocando primero $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ puntos en cada subconjunto, y distribuyendo los demás a voluntad. Numeramos ahora P_1, P_2,..., P_k los vértices de un polígono regular de k lados, y asociamos a cada subconjunto A_i, el vértice P_i. Coloreamos además los lados y diagonales del polígono regular de k lados de forma que en cada vértice concurran k–1 lados y diagonales de k–1 colores distintos, de acuerdo al Lema.

Para cada punto Q de los n+1 dados y distinto del pivote, pintamos todos los segmentos que lo unen a cada punto R de los n restantes, de la siguiente forma:

- Si Q y R están en distintos subconjuntos A_i y A_j, pintamos el segmento que los une del mismo color que el lado o diagonal P_iP_j en el polígono regular.
- Si Q y R están en el mismo subconjunto A_i, o si R=O es el pivote , pintamos el segmento que los une del color que no está presente en ninguno de los lados y diagonales que confluyen en el vértice P_i del polígono regular.

Claramente, con esta coloración cada punto Q de un subconjunto A_i, está unido a al menos $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ puntos por segmentos pintados con cada uno de los k colores. En efecto, para cada uno de los k–1 colores de los que están pintados los lados y diagonales que confluyen en el vértice P_i del polígono regular, el punto Q está unido a los al menos $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ puntos del subconjunto A_j asociado al vértice P_j que está unido al vértice P_i por dicho color; y para el color restante, el punto Q está unido a los al menos $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - 1$ puntos restantes del conjunto A_i, más al pivote O.
De lo anterior, deducimos que, en la coloración propuesta y para cada uno de los n puntos distintos del pivote, hay al menos $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ segmentos de cada uno de los k colores que confluyen

en dicho vértice. Para cada par de colores distintos, hay por lo tanto $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor^2$ posibles pares de segmentos que forman un ángulo bicolor cuyos lados son estos dos colores, y como hay $\binom{k}{2}$ posibles formas de elegir dos colores de entre los k existentes, para cada uno de los n puntos distintos del pivote hay al menos $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor^2 \binom{k}{2}$ ángulos bicolores que lo tienen por vértice, para un total de al menos

$$n\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor^2 \binom{k}{2}$$

ángulos bicolores.

Ahora bien, por la segunda parte del Lema, los segmentos que unen al pivote con los puntos de dos subconjuntos A_i y A_j, asociados a vértices consecutivos del polígono regular de k lados, están pintados de los colores ausentes en cada uno de los dos vértices, que son distintos, y hay al menos un ángulo bicolor con vértice en el pivote O, y por lo tanto, para la coloración construida, el número de ángulos bicolores es mayor que

$$n\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor^2 \binom{k}{2}.$$

4. ¿Existen infinitos enteros positivos que no pueden representarse de la forma $a^3 + b^5 + c^7 + d^9 + e^{11}$, donde a, b, c, d, e son enteros positivos?
Razona la respuesta.

SOLUCIÓN:

Como $5 \times 7 \times 9 \times 11 = 3465$, veamos cuántos enteros podemos obtener que sean menores o iguales que N^{3465}. Al ser $a^3, b^5, c^7, d^9, e^{11}$ positivos, cada uno de ellos es menor que N^{3465}, y tenemos

$$a < N^{1155},\ b < N^{693},\ c < N^{495},\ d < N^{385} \text{ y } e < N^{315}.$$

Luego al ser $1155 + 693 + 495 + 385 + 315 = 3043$, hay menos de N^{3043} tales números que se pueden poner en la forma indicada, y hay más de N^{3464} números entre los N^{3465} primeros que no se pueden representar en la forma propuesta. Al crecer N arbitrariamente, también aumenta el número de enteros positivos que no pueden representarse en la forma indicada y por lo tanto sí existen infinitos enteros que no se pueden representar de la manera propuesta.

5. Estudiar si existe una sucesión estrictamente creciente de enteros $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots$, que cumple las dos condiciones siguientes:
i) Todo número natural puede ser escrito como suma de dos términos, no necesariamente distintos, de la sucesión.
ii) Para cada entero positivo n, se verifica que $a_n > \frac{n^2}{16}$.

SOLUCIÓN:

Sea (a_n) la sucesión de todos los números naturales k, que en el sistema de numeración binario sólo tiene unos en las posiciones pares o sólo en los lugares impares. De esta forma se satisface la condición primera. Probemos a continuación que la estimación de la condición segunda es también válida.

Consideremos todos los enteros no negativos que son menores que 2^{2r}, es decir los números que no tienen más de $2r$ dígitos (cifras) en su representación binaria. Contamos el número de elementos de la sucesión que hay entre esos números: hay 2^r elementos que tienen ceros en todos los lugares pares y 2^r elementos que tienen ceros en todos los lugares impares y 0 es el único número que se cuenta dos veces. Por tanto hay $2^{r+1}-1$ elementos de la sucesión que son menores que 2^{2r} y así $a_{2^{r+1}-1}=2^{2r}$.

Para cada número natural, se puede encontrar un entero r, tal que $2^{r+1}-1\le n<2^{r+2}-1$.

Por tanto $2^r>\dfrac{n}{4}$ y esto implica que $a_{2^{r+1}-1}=2^{2r}>\dfrac{n^2}{16}$..

6. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que:

$$|AB|+|CD|=\sqrt{2}\,|AC| \quad \text{y} \quad |BC|+|DA|=\sqrt{2}\,|BD|.$$

¿Qué forma tiene el cuadrilátero $ABCD$?

SOLUCIÓN :

Sean M es el punto medio de AB, N el de BC, P el de CD y Q el de DA. El punto medio de la diagonal AC es E y el de la diagonal BD es F.

Las longitudes respectivas de los lados AB, BC, CD y DA son a, b, c y d. Y e y f las de las diagonales AC y BD, respectivamente.

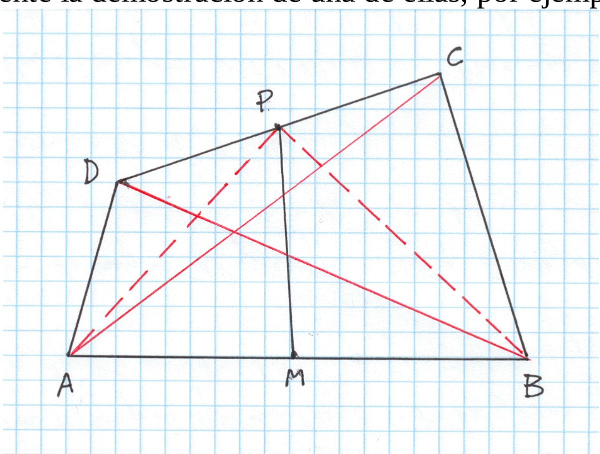
Las relaciones de Euler en los cuadriláteros convexos las formulamos como

$$i)\, a^2+c^2+4\cdot MP^2=b^2+d^2+e^2+f^2$$

$$ii)\, b^2+d^2+4NQ^2=a^2+c^2+e^2+f^2$$

$$iii)\, e^2+f^2+4EF^2=a^2+b^2+c^2+d^2$$

Recordemos brevemente la demostración de una de ellas, por ejemplo i).



MP es una mediana en el triángulo APB, así que el teorema de la mediana en él nos da

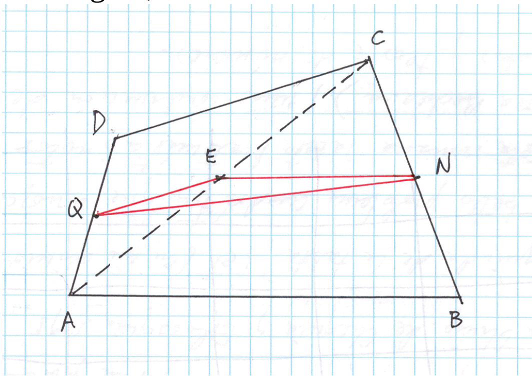
$$4MP^2=2\left(PA^2+PB^2\right)-AB^2;$$

ahora bien, PA es mediana en ACD y PB lo es en BCD, así que volviendo a aplicar en esos dos triángulos el teorema de la mediana y sustituyendo en la expresión anterior se obtiene i).

Vamos a demostrar ahora que se verifica la desigualdad

$$QN \leq \frac{1}{2}(AB+CD),$$

y que el signo igual se verifica si y sólo si AB es paralelo a *CD.*
En efecto, sobre la siguiente figura,



en el triángulo *EQN* se verifica obviamente $QN \leq QE+EN$, valiendo el signo igual cuando *E* está sobre *QN*; puesto que *QE* es paralela media en *ACD* (paralela a CD e igual a su mitad) y *EN* también es paralela media en *ABC* (paralela a *AB* e igual a su mitad), se tiene, inmediatamente,

$$QN \leq \frac{1}{2}(AB+CD). \quad (1)$$

(El signo igual vale, entonces, cuando *ABCD* es un trapecio de bases *AB* y *CD*).
A continuación vamos a demostrar que
Si ABCD es un cuadrilátero convexo, entonces

$$e^2+f^2 \leq d^2+b^2+2ac, \quad (2)$$

y el signo igual vale si y sólo si AB es paralelo a CD.
En efecto, multipliquemos (1) por 2 y elevemos al cuadrado:

$$4QN^2 \leq (AB+CD)^2,$$

y sustituyamos aquí la expresión de QN^2 dada por (ii):

$$b^2+d^2+4NQ^2 = a^2+c^2+e^2+f^2;$$

obtendremos

$$AC^2+BD^2 \leq AD^2+BC^2+2\cdot AB\cdot CD,$$

que es (2), y el signo igual es válido si y sólo si *AB* es paralelo a *CD.*
De una forma completamente similar obtendríamos

$$e^2+f^2 \leq a^2+c^2+2bd, \quad (3)$$

donde ahora el signo = es válido si y sólo si *AD* es paralelo a *BC.*
Sumando (2) y (3) llegamos entonces a que

$$2\left(e^2+f^2\right) \leq (a+c)^2+(b+d)^2, \quad (4)$$

Donde el signo igual vale si *AB* es paralelo a *CD* y *BC* lo es a *AD*, es decir, si *ABCD* es un paralelogramo. Puesto que elevando al cuadrado las dos relaciones del enunciado y sumando se obtiene (4) y hemos terminado.

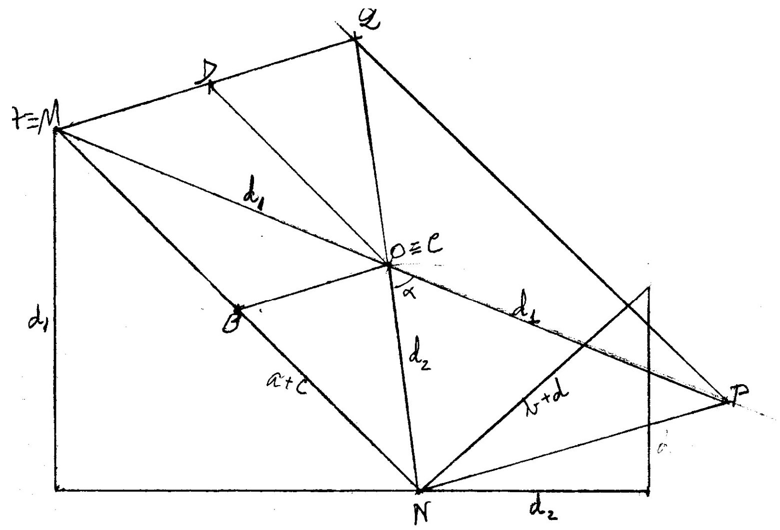
CONSTRUCCIÓN GRÁFICA:

Utilizaremos las notaciones siguientes.
Lados: *AB = a, BC = b, CD = c, DA = d.*
Diagonales del cuadrilátero: $AC = d_1$, y $BD = d_2$. Y para fijar ideas supongamos que $d_1 \geq d_2$.
Además, *M* es el punto medio de *AB, N* el de *BC, P* el de *CD* y *Q* el de *DA.* El punto medio de la diagonal *AC* es *E* y el de la diagonal *BD* es *F.*

Según el enunciado, se cumplen las relaciones

$$a+c=\sqrt{2}d_1 \ \text{ y } \ b+d=\sqrt{2}d_2 .$$

Dados d_1 y d_2, se construyen sendos triángulos rectángulos isósceles cuyos catetos son d_1 y d_2; entonces sus hipotenusas son $a + c$ y $b + d$ respectivamente.



El punto M (que coincidirá con A una vez terminada la construcción) será centro de una circunferencia de radio d_1; el punto N será centro de una circunferencia de radio d_2. A uno de los puntos de intersección de ambas circunferencias se le llama O. Sea P el simétrico de M respecto de O.
En el triángulo NOP, el ángulo $\alpha=\angle NOP$ es el suplementario de $\angle MON$. Apliquemos el teorema del coseno en los triángulos MON y NOP:

$$\text{En } \ \Delta NOP: \quad (NP)^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2d_1\, d_2 \cos\alpha \quad \text{y}$$
$$\text{en } \ \Delta MNO: \quad \left(\sqrt{2}\, d_1\right)^2 = d_1^2 + d_2^2 + 2d_1\, d_2 \cos\alpha$$

Sumando miembro a miembro y simplificando, obtenemos
$NP^2 = 2{d_2}^2 \Rightarrow NP = \sqrt{2}d_2 = b+d$.
Trazando por P la paralela a MN y por M la paralela a NP obtenemos el punto Q.
El paralelogramo $MNPQ$ es semejante al que buscamos; éste se obtiene trazando las paralelas a los lados por el punto O.
Para que la construcción sea posible, debe ser

$$d_1+d_2 > d_1\sqrt{2} \Leftrightarrow d_2 > \left(\sqrt{2}-1\right)d_1 \Rightarrow d_1\left(\sqrt{2}-1\right) < d_2 \le d_1 .$$

Si $d_1 = d_2 \Rightarrow \cos\alpha = 0$ y se obtendría un cuadrado.