Real Sociedad
Matemática Española

PROBLEMA DEL MES

Noviembre – 2021

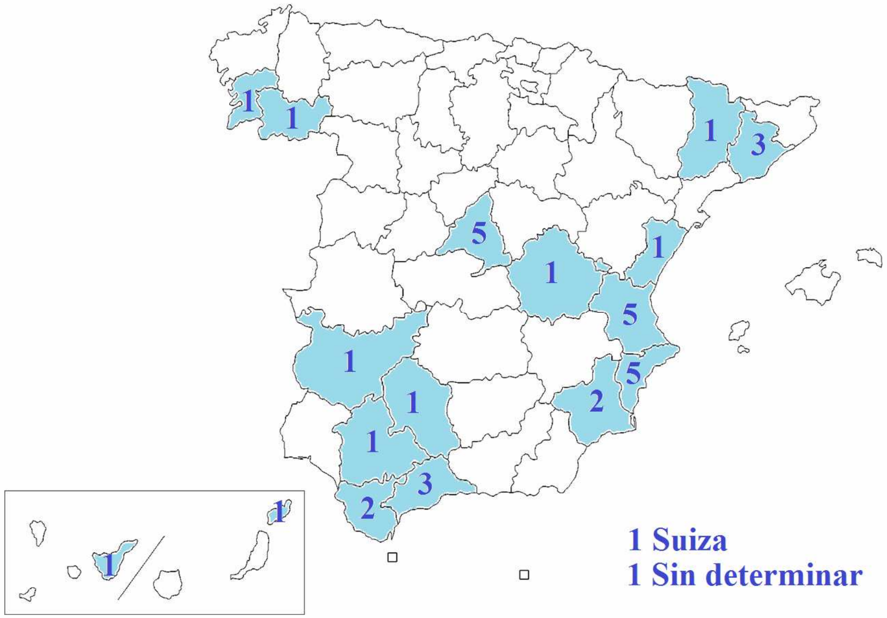
Soluciones

Relación de problemas de los que ya se ha recibido solución correcta

	Alevín	Infantil	Cadete	Juvenil	Júnior	Sénior
015	✓	✓	✓	✓	✓	✓
016	✓	✓	✓	✓	✓	✓
017	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Entendemos que todas aquellas personas que remiten material para esta sección, aceptan ser mencionados en el archivo PM del mes, bien como proponentes de los problemas, bien como resolutores y, además en este caso, si así lo considera el equipo editor, que sus soluciones se expongan como muestra del buen proceder a la hora de abordar dichos problemas. En caso contrario, rogamos que lo indiquen expresamente.

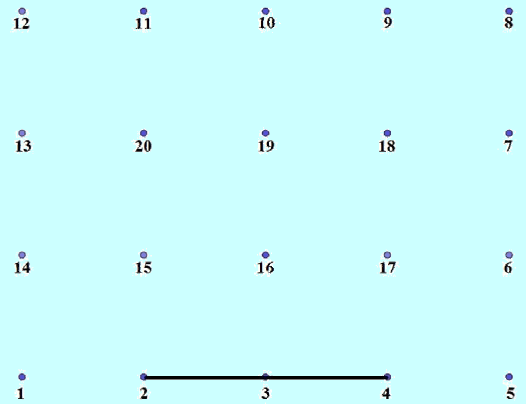
37 participantes (29 chicos / 08 chicas) **68 respuestas**



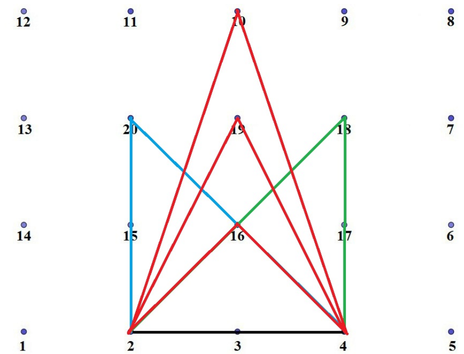
Alevín (5º/6º Primaria)

A-017. Triángulos isósceles.

Señala bien en qué punto podría estar el tercer vértice de un triángulo isósceles del que hemos dibujado uno de sus tres lados. Verás que son varias las posibilidades. Indícanos qué suman dan todas las etiquetas de los puntos que corresponden a ese posible tercer vértice.



Solución



Siendo $\overline{12}$ el lado desigual del triángulo isósceles, tenemos tres posibilidades para el tercer vértice: 10, 19 y 16 que suman $\underline{45}$

Y siendo $\overline{12}$ uno de los dos lados iguales del triángulo isósceles, tenemos dos posibilidades para el tercer vértice: 18 y 20 que suman $\underline{38}$

Luego, son cinco los vértices de la malla que proporcionan un triángulo isósceles con $\overline{12}$ uno de sus lados y la suma de las etiquetas de todos ellos será: $45+38=\underline{83}$

Bien resuelto por: ***Irene Navarro Espada*** *(CEIP Serrano Clavero. Requena),* ***Diego Salón Hernández*** *(IES Uno. Requena),* ***Ana Lozano Miguel*** *(IES Uno. Requena),* ***Enrique Farré Rey*** *(IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra),* ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(I.P.E.P. Córdoba),* ***Elisa Estévez Molina*** *(1ºP-6 años. Colegio Internacional María Montessori. Málaga),* ***Francisco J. Babarro Rodríguez*** *(IES A Carballeira. Ourense),* ***Mª del Rocío Rotili Guillén*** *(5ºP. CEIP. Villafranca de los Barros),* ***Iván López Márquez*** *(C. Inmaculada. Alicante),* ***Celso de Frutos de Nicolás*** *(Coslada),* ***Óscar Fco Valencia Rey*** *(Airbus. Getafe),* ***Pablo Morales Martín*** *(3ºP. CEIP Agustín de Argüelles. Alcorcón),* ***Guillermo Fuentes Herrero*** *(Murcia),* ***Elena Boix Miralles*** *(IES La Foia. Elche) y* ***Marta Nuévalos Lorente*** *(IES Puerta de Castilla. Minglanilla)*

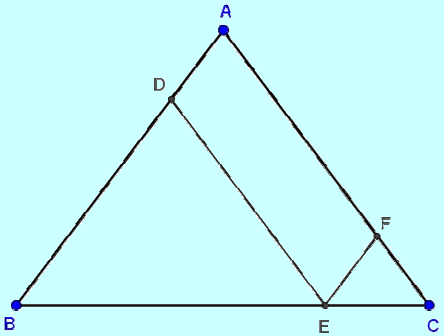
Infantil (1º/2º ESO)

I-017. Paralelogramo articulado.

Sea el triángulo ABC con $AB = AC = 25$ y $BC = 30$. Los puntos D, E y F están sobre los lados AB, BC y AC respectivamente, tales que DE y EF son paralelos a AC y AB respectivamente.

Si $CF = x$ ¿cuáles son los valores del perímetro y del área del paralelogramo $ADEF$?

Previamente puedes hacer pruebas con valores concretos de CF. Por ejemplo con $CF = 2'5$ y/o con $CF = 12'5$



Solución-1

Aunque no sea preciso, abordar los casos particulares propuestos resulta muy elocuente para luego, el caso general:

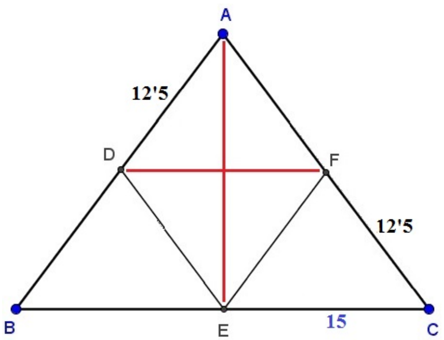
$CF = 12'5$

Así, el paralelogramo $ADEF$ resulta ser un rombo con medio triángulo de área.

$AE = \sqrt{AC^2 - EC^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$, esto es, AEC es un triángulo pitagórico de lados en proporción $3:4:5$

$DF = EC = 15$ paralela de la base a media altura

$\underline{P_{ADEF}} = 4 \cdot 12'5 = \underline{50}$ u.d.l.



Y $\underline{S_{ADEF}} = \frac{1}{2} \cdot S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{BC \cdot AE}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{30 \cdot 20}{2} = \underline{150}$ u.d.s

O bien: $\underline{S_{ADEF}} = \frac{D_M \cdot D_m}{2} = \frac{AE \cdot DF}{2} = \frac{20 \cdot 15}{2} = \underline{150}$ u.d.s

$CF = 2'5$

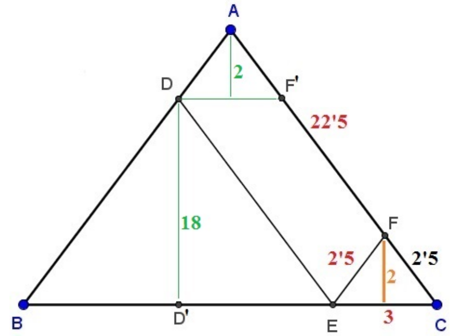
El triángulo FEC es semejante al ABC con dimensiones reducidas a un décimo

Así, el perímetro es $\underline{P_{ADEF}} = 2 \cdot 25 = \underline{50}$ u.d.l., igual que antes.

Y, como ya vemos en la figura, el área:

$\underline{S_{ADEF}} = S_{DECF'} = EC \cdot DD' = 3 \cdot (20 - 2) =$

$= 3 \cdot 18 = \underline{54}$ u.d.s



Y, en general, con $CF = x$

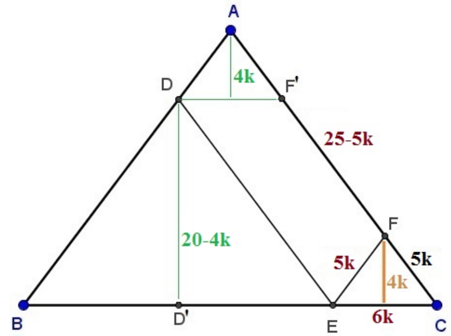
Haciendo $x = 5k$ para establecer bien la semejanza como vemos en la figura:

$\underline{P_{ADEF}} = 2 \cdot (AD + DE) = 2 \cdot (AD + DB) =$

$= 2 \cdot AB = \underline{50}$ u.d.l., constante, independiente del valor de $CF = x$

$\underline{S_{ADEF}} = S_{DECF'} = EC \cdot DD' =$

$= 6 \cdot k \cdot (20 - 4k) = 24 \cdot k \cdot (5 - k)$



Y poniéndola en función de x:

$$\underline{S_{ADEF}} = 24 \cdot \frac{x}{5} \cdot \left(5 - \frac{x}{5}\right) = \frac{24}{25} \cdot x \cdot (25 - x) = \underline{0'96 \cdot x \cdot (25 - x)} \text{ u.d.s.}$$

Solución-2

$CF = x = EF$

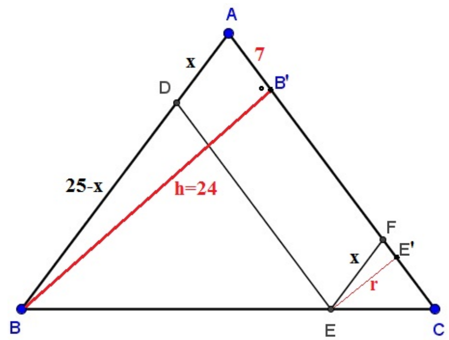
El perímetro, igual que antes:

$\underline{P_{ADEF}} = 2 \cdot (AD + DE) = 2 \cdot (AD + DB) =$

$= 2 \cdot AB = \underline{50}$ u.d.l., constante

Y el área que ya antes la calculamos con la altura sobre la base BC

$S_{ABC} = \frac{BC \cdot h_{BC}}{2} = \frac{30 \cdot 20}{2} = 300$ también la podríamos plantear considerando AC la base del triángulo:



$$S_{ABC} = 300 = \frac{AC \cdot h_{AC}}{2} = \frac{25 \cdot h_{AC}}{2} \quad \rightarrow \quad \underline{h_{AC} = 24}$$ *(en la figura,* h *simplemente).*

Y nótese también que las medidas de los lados del triángulo rectángulo ABB' *forman la conocida terna pitagórica* $7 : 24 : 25$

Y como los triángulos ABC y FEC son semejantes:

$$\frac{BB'}{AC} = \frac{EE'}{FC} \quad \rightarrow \quad \frac{h}{25} = \frac{r}{x} \quad \rightarrow \quad \frac{24}{25} = \frac{r}{x} \quad \rightarrow \quad r = \frac{24}{25} \cdot x = 0'96 \cdot x$$

Y, así, ya es directo el cálculo del área del paralelogramo, base por altura y aup:

$$\underline{S_{ADEF} = 0'96 \cdot x \cdot (25 - x)} \text{ u.d.s.}$$

Bien resuelto, además de por el proponente ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(I.P.E.P. Córdoba), por:* ***Enrique Farré Rey*** *(IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra),* ***Francisco J. Babarro Rodríguez*** *(IES A Carballeira. Ourense),* ***Celso de Frutos de Nicolás*** *(Coslada),* ***Óscar Fco Valencia Rey*** *(Airbus. Getafe),* ***Iván López Márquez*** *(C. Inmaculada. Alicante) y* ***Marta Nuévalos Lorente*** *(IES Puerta de Castilla. Minglanilla)*

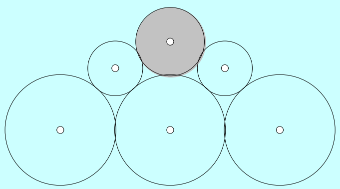
Se recibieron también cuatro soluciones incompletas y una incorrecta.

Cadete (3º/4º ESO)

C-017. Pila de circunferencias.

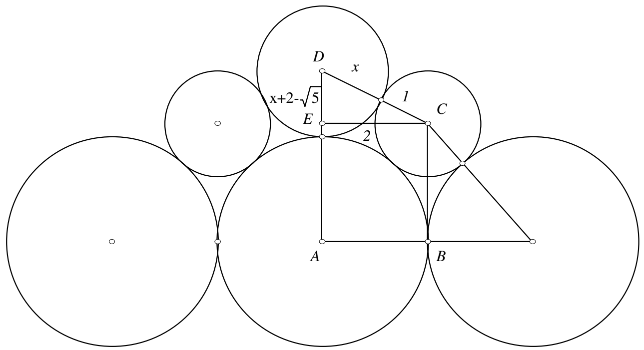
Las tres circunferencias de la fila inferior tienen un radio de **2 u.d.l.** y las dos de la fila intermedia tienen radio de **1 u.d.l.**

Hallar el radio de la circunferencia superior (en gris) sabiendo que todas son tangentes como indica el dibujo.



Solución:

Dibujamos la situación, llamando x al radio de la circunferencia gris



Claramente, por el Teorema de Pitágoras, $EA = CB = \sqrt{(1+2)^2 - 2^2} = \sqrt{5}$.

En el triángulo rectángulo DEC resulta $DC = x + 1$, $EC = 2$ y $DE = x + 2 - \sqrt{5}$ y, de nuevo, por Pitágoras $(x+1)^2 = 2^2 + (x + 2 - \sqrt{5})^2$ y resolviendo:

$$x^2 + 2x + 1 = 4 + x^2 + 4 + 5 + 4x - 2x\sqrt{5} - 4\sqrt{5} \quad \rightarrow$$

$$(2\sqrt{5} - 2)x = 12 - 4\sqrt{5} \quad \rightarrow \quad x = \frac{12 - 4\sqrt{5}}{2\sqrt{5} - 2}$$ y, racionalizando, queda:

$$x = \frac{(12 - 4\sqrt{5})(2\sqrt{5} + 2)}{(2\sqrt{5} - 2)(2\sqrt{5} + 2)} = \frac{16\sqrt{5} - 16}{16}$$, esto es: $x = \sqrt{5} - 1$

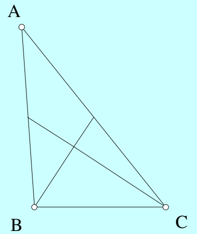
Bien resuelto por: ***Alex Izquierdo Nofuentes*** *(Sabadell),* ***Rubén Musoles Roca*** *(Villassar de Mar),* ***Enrique Farré Rey*** *(IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra),* ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(I.P.E.P. Córdoba),* ***Francisco J. Babarro Rodríguez*** *(IES A Carballeira. Ourense),* ***Yannis Antoni Serra Karydis*** *(Colegio Europeo Daos. Puerto del Carmen. Lanzarote),* ***Celso de Frutos de Nicolás*** *(Coslada),* ***Óscar Fco Valencia Rey*** *(Airbus. Getafe),* ***Cristina Ceaus Carga*** *(IES Dunas de las Chapas. Marbella) y* ***Marta Nuévalos Lorente*** *(IES Puerta de Castilla. Minglanilla)*

Se recibieron también dos soluciones incorrectas.

Jv-017. Medianas perpendiculares.

Juvenil (1º/2º Bachillerato)

Jv-017. Medianas perpendiculares.

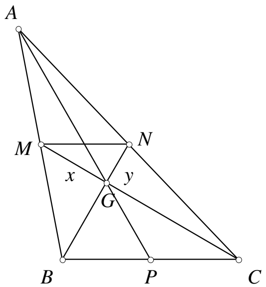


En un triángulo ABC las medianas que parten de B y C son perpendiculares.

Si BC vale 2 cm ¿Cuánto vale $AB^2 + AC^2$?

Solución 1

Claramente, llamando M, N y P a los puntos medios de los lados y G al baricentro como indica la figura:



$$MN = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 1$$

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= 4 \cdot MB^2 + 4 \cdot NC^2 = \\ &= 4 \cdot \left[x^2 + (2y)^2\right] + 4 \cdot \left[y^2 + (2x)^2\right] = \\ &= 4 \cdot \left[x^2 + 4y^2 + y^2 + 4x^2\right] = \\ &= 20 \cdot (x^2 + y^2) = 20 \end{aligned}$$

Luego: $\underline{AB^2 + AC^2 = 20}$

Solución 2

El rectángulo BGC es rectángulo: $GP = 1 \quad \Rightarrow \quad AP = 3 \cdot GP = 3$

Usando la fórmula de la mediana: $AP^2 = \dfrac{2 \cdot (AB^2 + AC^2) - BC^2}{4}$

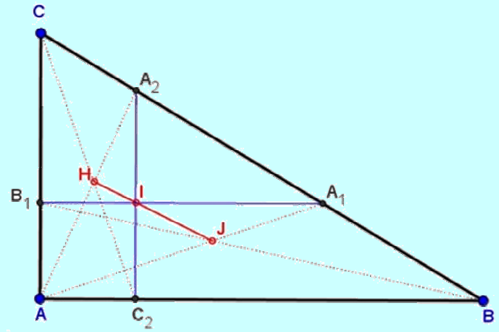
$$9 = \frac{2 \cdot (AB^2 + AC^2) - 4}{4} \quad \Rightarrow \quad \underline{AB^2 + AC^2} = \frac{36 + 4}{2} = \underline{20}$$

*Bien resuelto por: **Carlos Ragel Castilla** (The English Center. Puerto de Santa María), **Sotero Romero Morón** (The English Center. Puerto de Santa María), **Alex Izquierdo Nofuentes** (Sabadell), **Rubén Musoles Roca** (Villassar de Mar), **Enrique Farré Rey** (IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra), **F. Damián Aranda Ballesteros** (I.P.E.P. Córdoba), **Antonio Roberto Martínez Fernández** (CEA Mar Menor Torre Paheco), **Francisco J. Babarro Rodríguez** (IES A Carballeira. Ourense), **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada) y **Óscar Fco Valencia Rey** (Airbus. Getafe)*

Se recibió también una solución incorrecta.

Jn-017. Alineamiento puntual.

Sea ABC un triángulo rectángulo en A. Por el incentro I del mismo, trazamos dos rectas paralelas a los catetos AB y AC determinando los pares de puntos A_1 y B_1 por un lado y A_2 y C_2 por otro. De este modo, determinamos los trapecios rectángulos AC_2A_2C y AB_1A_1B. Pues bien, has de probar que los puntos de corte de las diagonales de ambos trapecios, H y J están alineados con el punto I.



Solución analítica

Consideramos un sistema de coordenadas cuyos ejes contienen a los catetos del triángulo rectángulo ABC, esto es, con $A(0,0)$, $B(b,0)$ y $C(0,c)$. Y, siendo r el radio de su circunferencia inscrita, el incentro será: $I(r,r)$.

Con todo esto: $\quad B_1(0,r)$ y $C_2(r,0)$

La intersección de las rectas: $\left.\begin{array}{lcl} B_1A_1 & \rightarrow & y = r \\ BC & \rightarrow & \dfrac{x}{b} + \dfrac{y}{c} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow A_1\left(\dfrac{b(c-r)}{c}, r\right)$

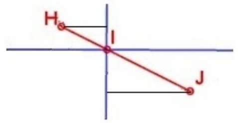
La intersección de las rectas: $\left.\begin{array}{lcl} C_2A_2 & \rightarrow & x = r \\ BC & \rightarrow & \dfrac{x}{b} + \dfrac{y}{c} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow A_2\left(r, \dfrac{c(b-r)}{b}\right)$

Y en los trapecios:

La intersección de las rectas: $\left.\begin{array}{lcl} AA_1 & \rightarrow & y = \dfrac{cr}{b(c-r)}x \\ B_1B & \rightarrow & \dfrac{x}{b} + \dfrac{y}{r} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow J\left(\dfrac{b(c-r)}{2c-r}, \dfrac{cr}{2c-r}\right)$

La intersección de las rectas: $\left.\begin{array}{l} AA_2 \;\rightarrow\; y=\dfrac{c(b-r)}{br}x \\ CC_2 \;\rightarrow\; \dfrac{x}{r}+\dfrac{y}{c}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow H\left(\dfrac{br}{2b-r},\dfrac{c(b-r)}{2b-r}\right)$

Los puntos H, I y J estarán alineados si estos dos pequeños triángulos rectángulos son semejantes.

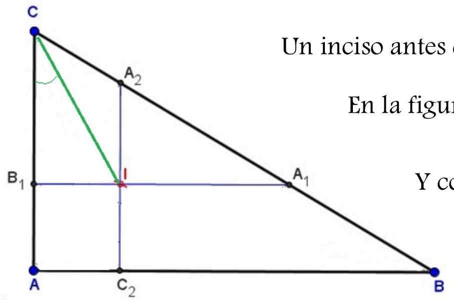


Y para constatarlo hemos de ver si: $\dfrac{I_x-H_x}{H_y-I_y}=\dfrac{J_x-I_x}{I_y-J_y}$

Comparemos ambas expresiones:

$$\frac{r-\dfrac{br}{2b-r}}{\dfrac{c(b-r)}{2b-r}-r}::\frac{\dfrac{b(c-r)}{2c-r}-r}{r-\dfrac{cr}{2c-r}} \Leftrightarrow \frac{br-r^2}{(c-r)(b-r)-br}::\frac{(c-r)(b-r)-cr}{cr-r^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \; r^2(c-r)(b-r)::[(c-r)(b-r)-br]\cdot[(c-r)(b-r)-cr] \;\Leftrightarrow$$



Un inciso antes de continuar:

En la figura: $\tan C=\dfrac{b}{c}$ y $\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{r}{c-r}$

Y como $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

$$\frac{b}{c}=\frac{2\cdot\dfrac{r}{c-r}}{1-\dfrac{r^2}{(c-r)^2}} \;\rightarrow\; \frac{b}{c}=\frac{2r(c-r)}{(c-r)^2-r^2}=\frac{2r(c-r)}{c(c-2r)} \;\rightarrow$$

$$b(c-2r)=2r(c-r) \;\rightarrow\; b(c-r)-br=2r(c-r) \;\rightarrow$$

$$(c-r)(b-2r)=br \;\rightarrow\; (c-r)(b-r)=br+(c-r)r$$

$$(c-r)(b-r)=(b+c)r-r^2$$

Y volviendo a la comparativa:

$$\Leftrightarrow \; r^2(c-r)(b-r)::[(b+c)r-r^2-br]\cdot[(b+c)r-r^2-cr] \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \; r^2(c-r)(b-r)::[cr-r^2]\cdot[br-r^2] \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \; r^2(c-r)(b-r)::r^2(c-r)(b-r)$$

Se da la igualdad y como todo el proceso es reversible, queda probado que los puntos H, I y J están alineados

*Bien resuelto, además de por el proponente **F. Damián Aranda Ballesteros** (I.P.E.P. Córdoba), por: **Pablo Faus Faus** (IES Mª Enriquez. Gandía), **Carlos Villagordo Espinosa** (CDPE British School. Alicante), **Enrique Farré Rey** (IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra) y **Jordi Agustí Abella** (CFA. La Seu de Urgell)*

Se recibieron también dos soluciones incompletas incorrectas.

Sénior

S-017. Tres complejos.

Sean a, b y c tres números complejos tales que $|a|=|b|=|c|=1$ y $a+b+c=0$. Demostrar que si k es un número natural no divisible por 3, entonces $a^k+b^k+c^k=0$.

Solución

Los afijos de tres números complejos a, b y c tales que $|a|=|b|=|c|=1$ y $a+b+c=0$ son los vértices de un triángulo equilátero.

Demostración

Observemos que:

$$|b-a|^2=(b-a)\cdot\overline{(b-a)}=(b-a)(\bar{b}-\bar{a})=|b|^2-b\cdot\bar{a}-a\cdot\bar{b}+|a|^2=2-a\cdot\bar{b}-\bar{a}\cdot b$$

y, análogamente: $|a-c|^2=2-a\cdot\bar{c}-\bar{a}\cdot c$ y $|b-c|^2=2-b\cdot\bar{c}-\bar{b}\cdot c$

Así $(a\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot b)+(a\cdot\bar{c}+\bar{a}\cdot c)=a\cdot(-\bar{a})+\bar{a}\cdot(-a)=-2\cdot|a|^2=-2$. Sustituyendo en la primera ecuación, tenemos que

$|b-a|^2=2-(-2-(a\cdot\bar{c}+\bar{a}\cdot c))=4+a\cdot\bar{c}+\bar{a}\cdot c$ longitud que coincidirá con

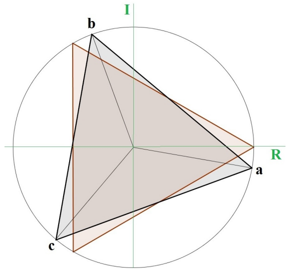
$|b-c|^2=2-b\cdot\bar{c}-\bar{b}\cdot c$ si y sólo si $2+(a+b)\cdot\bar{c}+(\bar{a}+\bar{b})\cdot c=0$

Esta expresión es equivalente a $2+(-c)\cdot\bar{c}+(-\bar{c})\cdot c=2-2\cdot|c|^2=0$ y, como vemos, es cierta. Por tanto, $\underline{|b-a|=|b-c|}$

De igual manera con otro par de lados tendríamos, por ejemplo, que $\underline{|b-c|=|a-c|}$

Y como, en definitiva, $\underline{|b-a|=|b-c|=|a-c|}$ quedaría probado que, efectivamente, el triángulo es equilátero.

Como los afijos de a, b y c son los vértices de un triángulo equilátero con baricentro en el origen, existirá un complejo ρ de módulo 1 tal que $\rho \cdot a = 1$, $\rho \cdot b = \omega$ y $\rho \cdot c = \omega^2$ donde $\omega := \dfrac{-1+\sqrt{3}\cdot i}{2}$ es una raíz cúbica primitiva de la unidad y $\omega^2 = \overline{\omega}$ con $1+\omega+\omega^2 = 0$.



Como k no es múltiplo de 3, tenemos que $\omega^k \neq 1$, por lo que $\omega^k \in \{\omega, \overline{\omega}\}$.

Además $\left(\omega^2\right)^k = \left(\overline{\omega}\right)^k = \overline{\omega^k}$, de modo que $\omega^k + \left(\omega^2\right)^k = \omega + \overline{\omega} = \omega + \omega^2$.

Por consiguiente, $\underline{a^k + b^k + c^k} = \rho^{-k} \cdot \left(1^k + \omega^k + \left(\omega^2\right)^k\right) = \rho^{-k} \cdot \left(1+\omega+\omega^2\right) = \underline{0}$

Bien resuelto por: ***Jordi Agustí Abella*** *(CFA. La Seu de Urgell),* ***Miguel Ángel Ingelmo Benito*** *(IES José Saramago.Arganda del Rey),* ***Luca Tanganelli Castrillón*** *(EPFL. Lausanne),* ***Fernando Díaz Porras*** *(Nfq. Madrid),* ***Enrique Farré Rey*** *(IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra),* ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(I.P.E.P. Córdoba),* ***Carlos García Peñalba*** *(IES Jaume Balmes. Barcelona),* ***Pedro Manuel de San Gil González*** *(Grd Mtcas. ULL) y* ***César Catalán Capaccioni*** *(Valencia)*

Se recibieron también una solucion incompleta y otra incorrecta.