Real Sociedad
Matemática Española

PROBLEMA DEL MES

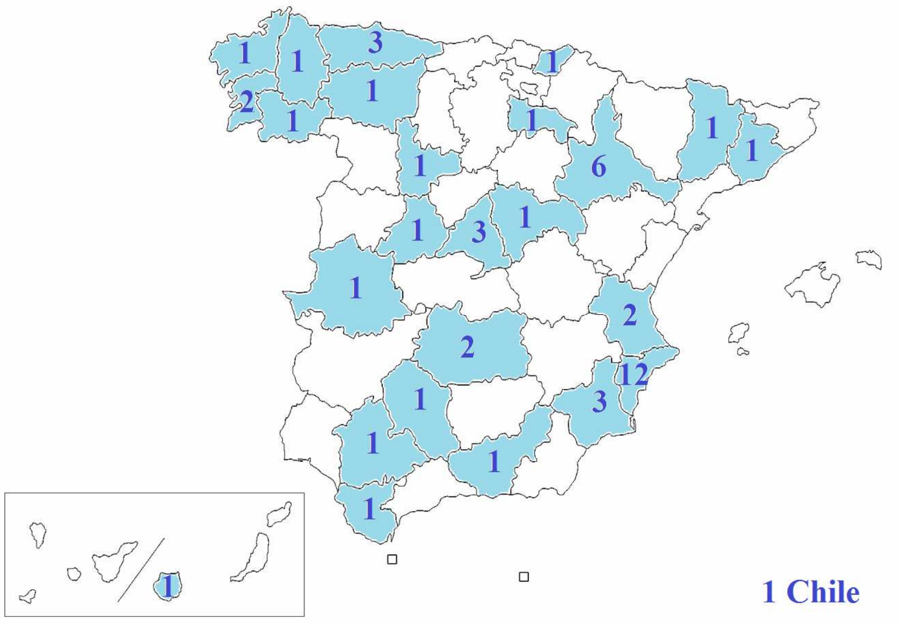
Soluciones oficiales

Relación de problemas de los que ya se ha recibido solución correcta

	Alevín	Infantil	Cadete	Juvenil	Júnior	Sénior
008	✓	✓	✓	✓	✓	✓
009	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Entendemos que todas aquellas personas que remiten material para esta sección, aceptan ser mencionados en el archivo PM del mes, bien como proponentes de los problemas, bien como resolutores y, además en este caso, si así lo considera el equipo editor, que sus soluciones se expongan como muestra del buen proceder a la hora de abordar dichos problemas. En caso contrario, rogamos que lo indiquen expresamente.

93 soluciones de 51 participantes (35 chicos / 16 chicas)



Alevín (5º/6º Primaria)

A-009. Veintiuno entre veinte.

Encuentra un valor entero para A y otro valor, también entero, para B de forma que la siguiente relación se cumpla, exactamente, para veintiún valores enteros de x.

$$\frac{A}{20} < x < \frac{B}{20}$$

Solución

Por ejemplo: $\underline{A = 0}$ y $\underline{B = 440}$

$$\frac{A}{20} < x < \frac{B}{20} \quad \to \quad \frac{0}{20} < x < \frac{440}{20} \quad \to \quad 0 < x < 22$$

Bien resuelto por: ***Samuel Abreu Prado*** *(Orense),* ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba),* ***Manuel Vázquez Mourazos*** *(Escuela Waldorf-Meniñeiros. Friol),* ***Enrique Farré Rey*** *(IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra),* ***Pablo Sáez Reyes*** *(IES Núñez de Arce. Valladolid),* ***Raúl Orellana Mateo*** *(IES Almoraima. Castellar de la Frontera),* ***Beatriz Latorre Martínez*** *(CEIP Foro Romano. Cuarte de Huerva),* ***Celso de Frutos de Nicolás*** *(Coslada),* ***Víctor Zapatero Castrillo*** *(UVigo)*

Infantil (1º/2º ESO)

I-009. Cuestión de primos.

Resuelve la ecuación $2p + 3q + 4r = 56$ con la condición de que p, q y r, sus tres incógnitas, sean siempre números primos.

Solución

Analicemos la expresión $2p + 3q + 4r = 56$:

- el primer y el tercer sumando son pares.
- Luego el segundo también ha de serlo.
- Y como q ha de ser primo, la única posibilidad es que $\underline{q = 2}$

Nos queda pues: $2p + 4r = 50 \quad \to \quad p + 2r = 25$. Basta probar, a la baja, con valores primos de $r < 13$:

$\underline{r = 11} \quad \to \quad p + 2 \cdot 11 = 25 \quad \to \quad \underline{p = 3}$

$\underline{r = 7} \quad \to \quad p + 2 \cdot 7 = 25 \quad \to \quad \underline{p = 11}$

$r = 5 \quad \to \quad p + 2 \cdot 5 = 25 \quad \to \quad p = 10$ que no vale, no es primo

$\underline{r = 3} \quad \to \quad p + 2 \cdot 3 = 25 \quad \to \quad \underline{p = 19}$

Bien resuelto por: ***Antonio Roberto Martínez Fernández*** *(IES Ruiz de Alda. San Javier),* ***Andrea Martínez Belda*** *(IES Jiménez de la Espada. Cartagena),* ***Manuel Vázquez Mourazos*** *(Escuela Waldorf-Meniñeiros. Friol),* ***Enrique Farré Rey*** *(IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra),* ***Aimara López López*** *(IES Ramón Areces. Grado. Asturias),* ***Pablo Sáez Reyes*** *(IES Núñez de Arce. Valladolid),* ***Raúl Orellana Mateo*** *(IES Almoraima. Castellar de la Frontera),* ***Celso de Frutos de Nicolás*** *(Coslada),* ***Víctor Zapatero Castrillo*** *(UVigo)*

Se recibieron también veintidós soluciones incompletas.

Cadete (3º/4º ESO)

C-009. Manipulaciones con enteros anuales.

Determina todos los números enteros n para los que la expresión $\dfrac{(n+2020)^2}{n+2021}$ resulta también ser un número entero.

Solución

$$\frac{(n+2020)^2}{n+2021}=\frac{(n+2021-1)^2}{n+2021}=\frac{(n+2021)^2-2\cdot(n+2021)+1}{n+2021}=$$

$$=n+2021-2+\frac{1}{n+2021}=n+2019+\frac{1}{n+2021}$$

Que será entero cuando $n+2021=\pm 1 \quad\rightarrow\quad \underline{n=-2020}$ ó $\underline{n=-2022}$

Bien resuelto por: ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba),* ***Enrique Farré Rey*** *(IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra),* ***Pablo Sáez Reyes*** *(IES Núñez de Arce. Valladolid),* ***Samuel Moreno Ramos*** *(Las Palmas de Gran Canarias),* ***Gema Sanchís Herrera*** *(La Salle. Paterna),* ***Diego González Lozano*** *(IES Gredos. Piedrahita),* ***Mario Balda Agudo*** *(Ave Mª de la Quinta. Granada)*

Se recibieron también dos soluciones incompletas y una incorrecta.

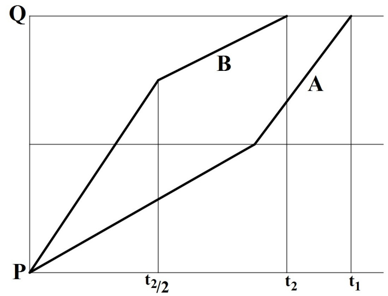
Juvenil (1º/2º Bachillerato)

Jv-009. Andar y correr.

Dos personas A y B realizan el mismo trayecto de un punto P a otro Q. A va andando la mitad del trayecto y corriendo la otra mitad. B corre la mitad del tiempo y anda la otra mitad. Suponemos que ambos van a la misma velocidad constante v_a cuando andan y v_c cuando corren. ($v_a < v_c$). Te proponemos dos cuestiones:

- Demostrar que B siempre llega antes.
- ¿Cuál ha de ser la relación $\lambda = v_c/v_a$ para que el tiempo empleado por A sea n veces el empleado por B?

Solución



La figura de la derecha muestra de forma gráfica la situación.

Sean t_1 y t_2 los tiempos empleados por A y B respectivamente y e la distancia de P a Q.

Las pendientes de cada trayecto indican qué velocidad llevan.

Para el cálculo basta usar la relación $e = v\cdot t$ del movimiento uniforme.

Para el movimiento de A tenemos: $t_1=\dfrac{e}{2\cdot v_a}+\dfrac{e}{2\cdot v_c}=\dfrac{e}{2}\cdot\dfrac{v_a+v_c}{v_a\cdot v_c}$

Para el de B se cumple: $e=v_c\cdot\dfrac{t_2}{2}+v_a\cdot\dfrac{t_2}{2}=\dfrac{t_2}{2}(v_a+v_c) \quad\rightarrow t_2=\dfrac{2\cdot e}{v_a+v_c}$

Dividiendo miembro a miembro $\dfrac{t_1}{t_2}=\dfrac{(v_a+v_c)^2}{4\cdot v_a\cdot v_c}\qquad (*)$

Y t_1 será mayor que t_2 si y sólo si $\underline{\dfrac{t_1}{t_2}>1}$.

Veamos que es cierto. En efecto,

$$\frac{(v_a+v_c)^2}{4\cdot v_a\cdot v_c}>1 \iff (v_a+v_c)^2>4\cdot v_a\cdot v_c \iff$$

$$v_a^2+v_c^2-2\cdot v_a\cdot v_c>0 \iff (v_a-v_c)^2>0$$

siendo esta última desigualdad evidente.

Para la segunda pregunta basta igualar la expresión $(*)$ a n y dividir numerador y denominador por v_c^2:

$$\frac{(\lambda+1)^2}{4\cdot\lambda}=n \;\rightarrow\; \lambda^2-(4n-2)\lambda+1=0 \;\rightarrow\; \underline{\lambda=2n-1+2\sqrt{n^2-n}}$$

Hemos tomado la raíz correspondiente al signo $+$, ya que ambas son positivas y su producto es 1; por tanto la mayor es la que corresponde a $\lambda>1$.

Bien resuelto por: ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba),* ***Enrique Farré Rey*** *(IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra),* ***Manuel Vázquez Mourazos*** *(Escuela Waldorf-Meniñeiros. Friol),* ***Pablo Sáez Reyes*** *(IES Núñez de Arce. Valladolid),* ***Diego González Lozano*** *(IES Gredos. Piedrahita),* ***Víctor Zapatero Castrillo*** *(UVigo)*

Se recibieron también dos soluciones incompletas.

Jn-009. Sistema irracional.

Halla los valores reales que satisfacen el sistema: $\begin{cases} a = 4+\sqrt{5-b} \\ b = 4+\sqrt{5-a} \end{cases}$

Y haz lo mismo, para este otro, en caso general: $\begin{cases} a = n+\sqrt{n+1-b} \\ b = n+\sqrt{n+1-a} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$

Solución

Podemos empezar trabajando en el caso general:

$$\left.\begin{matrix} a = n+\sqrt{n+1-b} \\ b = n+\sqrt{n+1-a} \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} a-n = \sqrt{n+1-b} \\ b-n = \sqrt{n+1-a} \end{matrix}\right\}$$ y elevando ambas al cuadrado:

$$\left.\begin{matrix} (a-n)^2 = n+1-b \\ (b-n)^2 = n+1-a \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} a^2-2an+n^2 = n+1-b \\ b^2-2bn+n^2 = n+1-a \end{matrix}\right\}$$

Restando: $a^2-b^2-2(a-b)n = a-b \ \rightarrow \ (a-b)(a+b-2n) = a-b$, igualdad que se puede dar, bien cuando $\underline{a=b}$ o bien, si son $\underline{a\neq b}$, simplificando, cuando $a+b-2n=1$, esto es, $\underline{a+b=2n+1}$

Primera posibilidad: $a=b$

$$a = n+\sqrt{n+1-a} \ \rightarrow \ a-n = \sqrt{n+1-a} \ \rightarrow \ (a-n)^2 = n+1-a$$

$$a^2-2an+n^2 = n+1-a \ \rightarrow \ a^2-(2n-1)a = -n^2+n+1$$

$$\left(a-\frac{2n-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 - n^2+n+1 = \frac{4n^2-4n+1-4n^2+4n+4}{4} = \frac{5}{4}$$

$$a-\frac{2n-1}{2} = \frac{\pm\sqrt{5}}{2} \ \rightarrow \ a = \frac{2n-1\pm\sqrt{5}}{2} = n-\left(\frac{1\mp\sqrt{5}}{2}\right)$$

Luego $a=b=\begin{cases} n-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2} = n-\varphi \\ n+\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = n+\varphi^{-1} \end{cases}$ siendo $\varphi \approx 1'618$ el nº de oro y $\varphi^{-1} \approx 0'618$

Podemos comprobar que el primer valor, $a=b=n-\varphi$, respetando el signo que tiene la raíz en la expresión de la ecuación, no es solución válida, pues:

$$a = n+\sqrt{n+1-a} \ \rightarrow \ n-\varphi = n+\sqrt{n+1-(n-\varphi)} \ \rightarrow \ -\varphi = +\sqrt{1+\varphi} \ \text{ falso}$$

Y el segundo, $\underline{a=b=n+\varphi^{-1}}$ sí, pues:

$$a = n+\sqrt{n+1-a} \ \rightarrow \ n+\varphi^{-1} = n+\sqrt{n+1-(n+\varphi^{-1})} \ \rightarrow \ \varphi^{-1} = \sqrt{1-\varphi^{-1}} \ \text{ cierto}$$

En el caso particular con $\underline{n=4}$, la ecuación $a = 4+\sqrt{5-a}$ tendrá por única solución $\underline{a = 4+\varphi^{-1}} = 4+\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = \underline{\dfrac{7+\sqrt{5}}{2}}$

Segunda posibilidad: $a+b=2n+1$

Trabajando, por ejemplo, con la primera ecuación:

$$a = n+\sqrt{n+1-b} = n+\sqrt{n+1-(2n+1-a)} = n+\sqrt{a-n}$$

$$a-n = \sqrt{a-n} \quad (a-n)^2 = a-n \quad a^2-(2n+1)a+n^2+n = 0$$

$$a^2-(2n+1)a+n(n+1) = 0 \ \rightarrow \ \underline{\begin{cases} a_1 = n \ \Rightarrow \ b_1 = n+1 \\ a_2 = n+1 \ \Rightarrow \ b_2 = n \end{cases}}$$ fácilmente comprobables, se podían haber intuido a simple vista.

En el caso particular con $n=4$ las soluciones serían: $\underline{(a,b)\equiv(4,5)}$ ó $\underline{(a,b)\equiv(5,4)}$

Llegaron soluciones correctas, además de la del proponente, de: ***Samuel Abreu Prado*** *(Orense),* ***Carlos Gaceo Santos*** *(León),* ***Manuel Vázquez Mourazos*** *(Escuela Waldorf-Meniñeiros. Friol),* ***Antonio Roberto Martínez Fernández*** *(IES Ruiz de Alda. San Javier),* ***Enrique Farré Rey*** *(IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra),* ***Pablo Sáez Reyes*** *(IES Núñez de Arce. Valladolid),* ***Samuel Moreno Ramos*** *(Las Palmas de Gran Canarias),* ***Carlos Ballesteros Rodríguez*** *(IES Francisco de Quevedo. Villanueva de los Infantes),* ***Diego González Lozano*** *(IES Gredos. Piedrahita),* ***Ignacio Larrosa Cañestro*** *(Coruña),* ***Víctor Zapatero Castrillo*** *(UVigo)*

Se recibió también una solución incorrecta.

S-009. Abeceincógnitas.

Dadas las relaciones entre los números a, b y c siguientes:

$$\left.\begin{matrix} a+b+c=2 \\ a^2+b^2+c^2=1 \\ a^3+b^3+c^3=0 \end{matrix}\right\}$$ Halla el valor de $a^4+b^4+c^4$

Solución-1

Las condiciones del enunciado, abreviadamente, las podemos expresar así;

$$S = a + b + c = 2 \qquad S_2 = a^2 + b^2 + c^2 = 1 \qquad S_3 = a^3 + b^3 + c^3 = 0$$

Y se nos pide el valor: $S_4 = a^4 + b^4 + c^4$

Consideremos a, b y c raíces de una ecuación mónica de grado tres que, por las relaciones de Cardano-Vieta, sabemos que se podría expresar así:

$$x^3 - Sx^2 + Dx - P = 0 \text{ con } D = ab + bc + ca \text{ y } P = abc$$

Operando: $\quad S^2 = S_2 + 2D \;\rightarrow\; 2^2 = 1 + 2D \;\rightarrow\; \underline{D = 1'5}$

La ecuación quedaría ya así: $x^3 - 2x^2 + 1'5x - P = 0$

Finalmente, trabajando por columnas podemos, en la primera, por ser raíces de la ecuación obtener el valor de P y, en la segunda, multiplicando cada una de esas ecuaciones por su correspondiente raíz, obtener ya S_4:

$$\begin{array}{ccc}
a^3 - 2a^2 + 1'5a - P = 0 & \rightarrow & a^4 - 2a^3 + 1'5a^2 - 0'\hat{3}a = 0 \\
b^3 - 2b^2 + 1'5b - P = 0 & \rightarrow & b^4 - 2b^3 + 1'5b^2 - 0'\hat{3}b = 0 \\
c^3 - 2c^2 + 1'5c - P = 0 & \rightarrow & c^4 - 2c^3 + 1'5c^2 - 0'\hat{3}c = 0 \\
\hline
S_3 - 2 \cdot S_2 + 1'5 \cdot S - 3P = 0 & & S_4 - S \cdot S_3 + D \cdot S_2 - P \cdot S = 0 \\
0 - 2 \cdot 1 + 1'5 \cdot 2 - 3P = 0 & & S_4 - 2 \cdot 0 + 1'5 \cdot 1 - 0'\hat{3} \cdot 2 = 0 \\
\underline{P = 1/3 = 0'\hat{3}} & & \underline{S_4 = -5/6 = -0'8\hat{3}}
\end{array}$$

Solución-2

Como en la anterior, llegamos a la ecuación: $x^3 - 2x^2 + 1'5x - P = 0$

Otra forma de determinar el producto:

Multiplicando: $\quad S \cdot S_2 = S^3 + (a^2b + a^2c + b^2c + b^2c + c^2a + c^2a) = S^3 + D' \quad \rightarrow$

$$D' = S \cdot S_2 - S^3 \;\rightarrow\; D' = 2 \cdot 1 - 0^3 \;\rightarrow\; \underline{D' = 2}$$

Elevando al cubo: $S^3 = S_3 + 3D' + 6P \;\rightarrow\; 2^3 = 0 + 3 \cdot 2 + 6P \;\rightarrow\; \underline{P = 1/3 = 0'\hat{3}}$

La ecuación quedaría así: $\underline{x^3 - 2x^2 + 1'5x - 0'\hat{3} = 0}$

Y ya podemos proseguir como en la solución anterior.

Solución-3 de Enrique Farré Rey (misma idea también de José Manuel Benedi)

Es habitual resolver este tipo de ejercicio usando las fórmulas de Cardano-Vieta y las de Newton. Sin embargo, usaré únicamente la Regla de Girard.

Regla de Girard:

Si se divide un polinomio derivada entre un polinomio primitivo según las potencias decrecientes, resulta un cociente ordenado según las potencias x^{-1}, x^{-2}. x^{-3}, … cuyos coeficientes respectivos S_0, S_1, S_2,… coinciden con la suma de las potencias 0, 1, 2, … de las raíces del polinomio primitivo.

En nuestro problema:

$S_0 = a^0 + b^0 + c^0 = 1 + 1 + 1 = 3 \qquad S_1 = a^1 + b^1 + c^1 = 2$

$S_2 = a^2 + b^2 + c^2 = 1 \qquad S_3 = a^3 + b^3 + c^3 = 0$

$S_4 = a^4 + b^4 + c^4$ que es lo que se pide

Partimos del polinomio de tercer grado $p(x) = x^3 + dx^2 + ex + f$.

Dividiendo $p'(x) = 3x^2 + 2dx + e$ entre $p(x)$, obtenemos en dos pasos el cociente: $3x^{-1} - dx^{-2}$, siendo $-d = 2$, luego $d = -2$.

Dividiendo $p'(x) = 3x^2 - 2x + e$ entre $p(x) = x^3 - 2x^2 + ex + f$, obtenemos el valor de $e = 3/2$

Y procediendo del mismo modo una vez más, se obtiene el polinomio: $p(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{3}$ y su polinomio derivada: $p'(x) = 3x^2 - 4x + \frac{3}{2}$

Finalmente, dividiendo $p'(x)$ entre $p(x)$ se obtiene el cociente: $3x^{-1} - 2x^{-2} + x^{-3} - \frac{5}{6}x^{-5}$... de donde $\underline{a^4 + b^4 + c^4 = -\frac{5}{6}}$

Llegaron soluciones correctas, además de la del proponente, de: ***Carlos Gaceo Santos*** *(León),* ***Manuel Amorós Juan*** *(IES Navarro Santafé. Villena),* ***Samuel Abreu Prado*** *(Orense),* ***Jordi Agustí Abella*** *(CFA. La Seu de Urgell),* ***José M. Sánchez Muñoz*** *(IES Jaranda. Jarandilla de la Vera),* ***Roberto Caletrio Mata*** *(CEIPS Santo Ángel de la Guarda. Chapinería),* ***Antonio Roberto Martínez Fernández*** *(IES Ruiz de Alda. San Javier),* ***Manuel Español Salvador*** *(Barcelona),* ***Enrique Farré Rey*** *(IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra),* ***Héctor Raúl Fernández Morales*** *(Airbus. Leganés),* ***Paz Jiménez Seral*** *(UniZar),* ***Pablo Sáez Reyes*** *(IES Núñez de Arce. Valladolid),* ***Alberto Castaño Domínguez*** *(US),* ***José Manuel Benedi Cortés*** *(Zaragoza),* ***César Catalán Capaccioni*** *(Valencia),* ***Juan Navarro Loidi*** *(San Sebastían),* ***Clemente Sacristán Moreno*** *(Guadalajara),* ***Ignacio Larrosa Cañestro*** *(Coruña),* ***Samuel Campos Cid*** *(Santiago de Chile)*

Se recibieron también dos soluciones incorrectas.

■